



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Mathématiques II

Session 2021	Date : 25/06/2021	Heure : 8H	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations et définitions :

- Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée tA et I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et de la norme euclidienne associée :

pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k \text{ et } \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = A{}^tA = I_n$. On désigne par $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

- $S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}); {}^tXAX \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n\}$, où $S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n .

- On dit que deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables s'il existe une matrice **orthogonale** P telle que $A = {}^tPBP$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et $\rho(A)$ le rayon spectral de A , le réel défini par : $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.

- Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on note $diag(A_1, \dots, A_s)$ la matrice diagonale par blocs suivante :
$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_s \end{pmatrix},$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$ et $n_i \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = \sup_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2$. On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.
- Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, le gradient de F en X noté $\nabla F(X)$ est l'unique vecteur dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall H \in \mathbb{R}^n$, $dF(X).H = \langle \nabla F(X), H \rangle$.
- Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux applications de classe C^1 , alors $F \circ \gamma : t \mapsto F(\gamma(t))$ est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et on a : $\forall t \in] -1, 1[$, $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.

Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que **son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$** .

Questions préliminaires (4 points)

1. Quelques propriétés du rayon spectral

- Donner $\rho(\lambda I_n + N)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.
- Montrer que :
 - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.
 - Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_2 \leq \|A\|_2 \|X\|_2$, puis déduire que $\rho(A) \leq \|A\|_2$.
- Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \text{diag}(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, où p et q sont deux entiers naturels non nuls.
Montrer que $\rho(M) = \max(\rho(A_1), \rho(A_2))$.

2. Décomposition de Schur

On se propose de montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire supérieure. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

- Justifier que, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ est stable par f .
- Soit $B' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base B .

Montrer que la matrice de f dans la base B' est triangulaire supérieure.

- En déduire la décomposition de Schur :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}); A = {}^t P T P,$$

où $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure.

Partie I (4,5 points) : Rayon spectral de ${}^t A A$

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; X \mapsto \langle AX, X \rangle = {}^t X A X$ et $S = \{X \in \mathbb{R}^n; \|X\|_2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

- Justifier l'existence de $X_0 \in S$ tel que $F(X_0) = \max_{X \in S} F(X)$.
 - Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que $\nabla F(X) = ({}^t A + A) X$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$.
Soit $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur orthogonal à X_0 . On considère également

$$\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto \cos(t\|V\|_2) X_0 + \frac{1}{\|V\|_2} \sin(t\|V\|_2) V.$$

- Vérifier que $\gamma(0) = X_0$, $\gamma'(0) = V$ et que, pour tout $t \in]-1, 1[$, $\gamma(t) \in S$.

(d) Vérifier que la fonction $F \circ \gamma$ admet un maximum en 0. Que vaut alors la dérivée de la fonction $F \circ \gamma$ en 0?

(e) En déduire que $\langle \nabla F(X_0), V \rangle = 0$, puis que $\nabla F(X_0) = \lambda X_0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(f) Justifier que λ est une valeur propre de ${}^tA + A$ et que ${}^tX_0AX_0 = \frac{\lambda}{2}$.

2. Conclure que $\max_{X \in S} |{}^tXAX| = \frac{1}{2} \rho({}^tA + A)$.

3. Montrer alors que $\sqrt{\rho({}^tAA)} = \|A\|_2$.

4. En déduire que :

(a) Si $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, alors $\|A\|_2 = \max(\|A_1\|_2, \|A_2\|_2)$.

De même, on admet que si $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$ est une matrice diagonale par blocs, alors $\|A\|_2 = \max\{\|A_i\|_2, 1 \leq i \leq s\}$.

(b) Si A est une matrice symétrique réelle, alors $\rho(A) = \|A\|_2$.

Partie II (5,5 points) : Formule de Gelfand

Soit $n \geq 2$. On se propose de montrer la formule de Gelfand suivante :

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} \quad (*)$$

1. Vérifier (*) lorsque A est une matrice nilpotente.

2. On suppose que $A = \lambda I_n + N$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et N est une matrice nilpotente.

(a) Soit $k \geq n$. Montrer que : $\|A^k\|_2 \leq k^n |\lambda|^{k-n} \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda|^{n-i} \|N^i\|_2$.

(b) En déduire (*), dans ce cas.

3. Soit $s \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer (*) lorsque $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$, où, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $A_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et N_i est une matrice nilpotente d'ordre n_i . (On pourra utiliser la question 4 de la partie I).

4. Cas général : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $X \mapsto AX$, l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On note $\chi_A = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_i}$, le polynôme caractéristique de A .

(a) Montrer que : $\mathbb{R}^n = \ker(f - \lambda_1 \text{id})^{m_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_s \text{id})^{m_s}$.

Dans la suite, on note $F_i = \ker(f - \lambda_i \text{id})^{m_i}$.

(b) Montrer que, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, F_i est stable par f et que l'endomorphisme induit par f sur F_i se décompose de la manière suivante : $f_{F_i} = \lambda_i \text{id}_{F_i} + u_i$, où u_i est un endomorphisme nilpotent de F_i .

(c) En déduire que $A = P \tilde{A} P^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\tilde{A} = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$, où $A_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et N_i est une matrice nilpotente.

(d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(\|P\|_2 \|P^{-1}\|_2)^{-\frac{1}{k}} \|\tilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq (\|P\|_2 \|P^{-1}\|_2)^{\frac{1}{k}} \|\tilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}}.$$

(e) En déduire (*).

Partie III (6 points) : Matrices radiales

On dit que la matrice A est **radiale** si $\|A\|_2 = \rho(A)$.

1. Donner un exemple d'une matrice radiale.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice M est-elle radiale ?

3. Première caractérisation

(a) Vérifier que A est radiale si, et seulement si, $\rho(A) \geq \|A\|_2$.

(b) En déduire que si A est radiale alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est aussi radiale.

(c) Montrer que A est radiale si, et seulement si, $(\rho(A)^2 I_n - {}^t A A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels strictement positifs.

Montrer que M est radiale si, et seulement si, $a = b$.

(e) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité, X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $\omega \in \Omega$, on

$$\text{note } M(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

Déduire que $\mathcal{P}(\{w \in \Omega \text{ tel que } M(w) \text{ est radiale}\}) = \frac{p}{2-p}$.

4. Deuxième caractérisation

Montrer que A est radiale si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\|_2 = \|A\|_2^k$.
(On pourra utiliser la formule de Gelfand pour démontrer la réciproque).

5. Troisième caractérisation

On suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A sont ordonnées de la manière suivante :

$$\rho(A) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_s| > |\lambda_{s+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Montrer que A est radiale si, et seulement si, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme suivante :

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, B), \text{ avec } B = \begin{pmatrix} \lambda_{s+1} & (0) \\ & \ddots \\ (b_{ij}) & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ vérifiant } (\rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B) \in \mathcal{S}_{n-s}^+(\mathbb{R}).$$

(On pourra utiliser la décomposition de Schur).

6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Vérifier que M est une matrice radiale. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Fin de l'énoncé